Weyl和とvan der Corputの方法 (解析的整数論 : 指数和について)

中井, 喜信

数理解析研究所講究録
456巻 1982年 2-18

Weyl和と van der Corput の方法

（山梨大・教育） 中井喜信

0° 解析数論において指数和の方法と呼ばれるものについて分担で解説をするのがこの研究集会の目的の一つで、筆者はそのうちのいわゆる「van der Corput の方法」と言われるものについて述べる。 van der Corput が [v.d.C-1 & 2] において見つけた方法（一変数型）は、その後 [T], [Ra] などにより、ある程度改良され、又、2変数型（あるいは多変数型）についても [T], …, [Ko-1 & 2], （[中-1, 2] には和をとる領域の影響を調べる試みがある）などに拡張されているが、本質的な所においては、後述の van der Corput が見つけたままの形の [系(1)] で推察されるが如く、いわゆる2次形式のテータ級数の変換公式の域を超えず、その点では、[久], [V0] などに示唆される方向としての、例えば αx^k $(\alpha \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N},\ k \geq 3)$ についての「高次」テータ級数と称すべきものはまだ見つけられていないと見る。（[M] には3次の場合が試みられているが、いわゆる反

転公式としてはまだ不十分。対応すべき「高次」の連分数展開とは何者であろうか。)

そこで、ここでは van der Corput が最初に見つけた事の本質的な所のみを解説する事にしたい。「方法」であるので、文献として挙げるべきものは各分野にわたり、筆者の見落しも多い事であるから、well-known なもの、及び新しいものを挙げて、あとは参考文献にたぐってゆけるもののみとしたい。

1°. この集会の最初の話であるので、まず指数和 (Weyl和) とは何か、及び、その比較を行ってみたい。

例えば、$F(\mathbf{x}) \in \mathbb{Z}[x_1, \cdots, x_s]$ $\left(\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_s)\right)$ により

$$S_n \underset{\text{def.}}{=} \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^s \cap \mathcal{B}_n \; ; \; F(\mathbf{x}) = n \right\}$$

$$n \in \mathbb{Z}, \qquad \mathcal{B}_n \subset \mathbb{R}^s$$

を調べたいとき、F, n, $\mathcal{B}_n$ の組合せに応じていろいろの手法が用意されるわけであるが、指数和は

$$\begin{cases} s \text{ は、degree of } F \text{ に応じて「ある程度」大きい} \\ \mathcal{B}_n \text{ は } s \text{ 次元空間での「区間」の形} \end{cases}$$

の時に、主に有効な道具である。

F が与えられたときに、個別の n に対し(適当に $\mathcal{B}_n$ を選んで) S_n が $\neq \phi$ かどうかを判定したいとき、原理的には次

のようになろう。

① 直接 $\# S_n \geq 1$ を示す方法。例えば Waring の問題における Davenport の lemma ([Van], 第6章)や、いわゆる篩の方法など。

② 母函数を使う方法。いま

$$f(z) \underset{\mathrm{def.}}{=} \sum_{x \in S_n \cap \mathbb{Z}^n} \rho_x \cdot z^{F(x)} \qquad z \in \mathbb{C},\quad \rho_x : \text{適当な重み}$$

とおいて、$f(z)$ が $z=0$ のまわりで正則ならば

$$J_n \underset{\mathrm{def.}}{=} \sum_{x \in S_n \cap \mathbb{Z}^n \ \mathrm{s.t.}\ F(x)=n} \rho_x$$

は

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint f(z) \cdot \frac{dz}{z^{n+1}}$$

となる。右辺の Cauchy 積分からいかにして non-trivial な情報を得るか(少くとも、所定の n と適当な S_n で $J_n \neq 0$ を示す)が難物で、その一方法として、Hardy-Littlewood の circle-method がある。([Van] に良い解説あり)。右辺で(もし成功する手法なら)いわゆる Singular Series と呼ばれる「局所解」の個数密度の無限積に相当する因子が、丁度 Hasse の原理に関連するものである。現実には、各種問題で局所解はよく調べられているが、肝心の、Hasse の原理そのものに対応する上記情報をとり出す部分は、限られた場合にしか成功し難い。

③ 原理的には、②の方法と同様であるが、②では通常 S_n は正の自然数(または0)全体を渡るなど大きい set を使うので

収束の問題がからむ。そこで $\mathfrak{B}_n$ ははじめから「有限区間」として、$P_{\mathbf{x}}=1$,　$z=e^{2\pi i\alpha}$　($\alpha\in\mathbb{R}$)　の形で

$$f(\alpha) \underset{\mathrm{df}}{=} \sum_{\mathbf{x}\in \mathfrak{B}_n\cap\mathbb{Z}^s} e^{2\pi i\alpha F(\mathbf{x})} \qquad (\alpha\in\mathbb{R})$$

の形の和を扱えば良いであろう。そこで歴史的言葉として、

$$F(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}[X_1,\cdots,X_s]$$

$$\mathfrak{B} \subset \mathbb{R}^s \quad : \text{区間型}$$

により

$$\sum_{\mathbf{x}\in\mathfrak{B}\cap\mathbb{Z}^s} e^{2\pi i F(\mathbf{x})}$$

の形の和を、通常 Weyl 和と呼び、更に拡げて、

　　$F(\mathbf{x})$ は適当な(例えば C^{n+1}-級) n 変数実数値函数

のとき、同様の形の和を指数和と呼んでいる。

広く言えば、$F(\mathbf{x})\in\mathbb{Z}[X_1,\cdots,X_s]$ なら、Weyl 和は

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m e^{2\pi i\alpha m}, \quad a_m=\#\{\mathbf{x}\in\mathfrak{B}_n\cap\mathbb{Z}^s \text{ s.t. } F(\mathbf{x})=m\}$$

と見て、Fourier 級数論の一部分と言えそうだが、そこはそれ、マニヤ的に個別の工夫がなされてきているわけである。Fourier 級数論の立場からは、本報告集で、倉坪氏の解説があろう。

それから、例えば、Riemann のゼータ函数の評価に使うために（参、[T]、第4,5章）

$$\sum_{x} g(x)\cdot e^{2\pi i F(x)} \qquad g(x) も実数値函数$$

の形の和を扱う事がある事も多いが、$\sum_{x} e^{2\pi i F(x)}$ の事から、上記の和の情報を得るのに、いわゆる abel 和法(部分和法)や I.M. Vinogradov の方法などがある。(本報告集の本橋氏の論参)

2° F(x) については、

$\begin{cases} \text{一変数型の和になるもの (additive type)} \\ \text{本質的に多変数のまま変数分離が効かないもの} \end{cases}$

と分れる。(勿論中間状態も可能)、しかし最初にして最後まで目標とすべきものは、Waring の問題に関する Weyl 和ではなかろうか。現在は、勿論、まだ証明されてない事であるが「期待される評価は、Weyl 和について述べれば、一変数型で

$$f(x) = \underset{(k\text{次多項式})}{x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_{k-1}x} \qquad \in \mathbb{Z}[x]$$

$$N \gg 1$$

について、

【local 型】 $\alpha \in \mathbb{R}$, 既約分数 a/q $(q\in\mathbb{N},\ a\in\mathbb{Z},\ (a,q)=1)$ が

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| < \frac{1}{qN^{k-1}}, \qquad 1 \le q \le N^{k-1}$$

のとき、($N\to\infty$ について)

$$\sum_{n \text{ s.t. } X<n\le X+N} e^{2\pi i \alpha f(n)} \underset{(?)}{=} \left\{\frac{1}{q}\sum_{1\le n\le q} e^{2\pi i \frac{a}{q} f(n)}\right\} \times \int_X^{X+N} e^{2\pi i(\alpha-\frac{a}{q})f(x)}\,dx + O_k\left(N^{1-\frac{1}{k}}\right)$$

但し $1 \le q \le N$ のとき

及び

注) 講演中の N, P の関係はマチガイ

同上 $\underset{(?)}{=} O_k(N^{1-\frac{1}{k}})$

但し $N < q \le N^{k-1}$ のとき

であろう。また

【平均値型】 $\lambda > k$ (λ 実数) で $\forall \varepsilon > 0$ に対し

$$\int_0^1 \left| \sum_{n \text{ s.t. } X<n\le X+N} e^{2\pi i \alpha f(n)} \right|^{\lambda} d\alpha \underset{(?)}{\ll}_{(k,\lambda,\varepsilon)} N^{\lambda-k+\varepsilon}$$

であろう。注)

いずれも、$k \geqq 3$ では、まだ不十分で ($k=2$ は [N], [K.-J.-K.] など) (かつ、[平均値型] では、現今の手法では、$\lambda = 2\ell$ ($\ell \in \mathbb{N}$) の形でないと実際には扱えない。一般の指数和型の場合は、f と区間の組合せがいろいろ可能であるが、例えば $f^{(k+1)}$ (高階導関数) や、van der Corput の方法では f'' (多変数型なら Hessian) などが、α の役を果す事となる。

3° ここで試みに指数和についての著名な三方法の比較を行ってみよう。(参. [T], 第5, 6章)

一変数型《指数和 $\sum_{X<n\le X+N} e^{2\pi i F(x)}$ または Weyl和 $\sum_{X<n\le X+N} e^{2\pi i \alpha f(x)}$ (f: k次式)》

	Weyl-Hardy-Littlewood の方法	van der Corput の方法	I.M. Vinogradov の方法
不等式	◦Schwarz の不等式 ◦三角不等式	◦積分の平均値定理 $\int_X^x \underset{\text{単減}}{f(x)} g(x)dx = f(x) \cdot \int_X^{\xi} g(x)dx$ を利用する工夫からの評価	◦Hölder の不等式 (和, 積分の両方) ◦double sum method

注) $\lambda-k+\varepsilon$ の $+\varepsilon$ は λ が少し大きければ不要

<table>
<tr><td>道具</td><td>◦差分（多項式なら極化形式）</td><td>◦Euler の和公式
（有限和形の Poisson 和公式）
◦特に
$\langle x\rangle = \frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi\nu x}{\nu}$
↳(鋸歯型函数)</td><td>◦巾和と基本対称式との関係の Newton の公式
◦L_1-ノルムとしてのある型の連立一次方程式の整数解の個数</td></tr>
<tr><td>効果的な対象</td><td>主に Weyl 和</td><td>$F'' \asymp \lambda$(一定)(∴F' 単調)のもの</td><td>Weyl和なら各次数の係数が一般的実数の多項式.
指数和にも有力</td></tr>
<tr><td rowspan="2">証明の各段階での和をとる区間の変化</td><td rowspan="2">$|(\cdots)|$ の中では区間は一定. 連続する整数をわたる.
$|(\cdots)|$ の外では区間長は相乗的に増す</td><td>F'(元の区間)に移る.
和は連続整数の上をわたる</td><td>$|(\cdots)|$ の中では区間長は $X \mapsto X^{1-\frac{1}{k}}$ となり外では区間長が $X^{\frac{1}{k}}\times(\cdots)$ で増す.</td></tr>
<tr><td colspan="2">小区間への分割は等分(Vinogradov), あるいは算術級数的(Linnik(注)-Karacuba)に選出.
いずれも小区間の平行移動を利用してまとめる.</td></tr>
<tr><td>先に得られる評価</td><td>local型</td><td>local型</td><td>平均値型</td></tr>
<tr><td rowspan="2">使用するDiophantus近似の評価</td><td>$\#\left\{x\in\mathbb{Z} \;\middle|\; \begin{array}{l} X<x\le X+N \\ \|\alpha x\|\le\frac{1}{U}\end{array}\right\}$ の上界</td><td>$|F''(x)| \asymp \lambda$ on $[X, X+N]$
（実用には差分も利用して $|F^{(k+1)}| \asymp \lambda_{k+1}$ なども利用する）</td><td>$|F^{(k+1)}| \asymp \lambda_{k+1}$ on $[X, X+N]$
$\#\left\{x\in\mathbb{Z};\ \begin{array}{l} X<x\le X+N \\ \|\alpha x\|\le\frac{1}{U}\end{array}\right\}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">いずれも利用するDiophantus近似は「linear型」のもの</td></tr>
<tr><td>実効
local型/平均値型</td><td>$O_{(k)}\left(N^{1-\frac{1}{2^{k-1}}}\right)$ / $l>2^k$</td><td>Weyl和なら左とほぼ同じ
O-公式的に使えるなら効果的</td><td>$O_{(k)}\left(N^{1-\frac{c}{k^2\log k}}\right)$ / $l \gg k^2\log k$</td></tr>
<tr><td>感想</td><td>最も一般的に成立.
従って能率も悪い.</td><td>2次式以外は
未開発</td><td>最も能率的.
ただし上記「平行移動」を利用する所が, 一般の実係数多項式を対象とすべき事となり弱点の原因</td></tr>
</table>

(注) Ю.В. Линник (Yu.V. Linnik) Матсб. 1943. Т.12, 28-39. (本橋氏の御指摘による)

対応する多変数型で見るべきものは

	[B], [D], など	[Ko-2, 3], [T] など	本報告集金光氏の解説

という具合であろうか。他に D.J. Lewis や G.L. Watson の諸論文も参考となろう。

証明においては、すべて、実又は複素解析で、いわゆる p-adic な手法は、本質的には未見と言えるであろう。

以上、方法であるので、いろいろ組合せて使うわけであるが各々の特徴は、見える事であろう。

4°、さて、van der Corput の方法であるが、以下

$$\sum_{x\,:\ X<x\le X+N,\ x\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i f(x)} \qquad f(x):\text{実数値関数}$$

について、

Ⓐ 積分の平均値定理を利用した種々の評価

Ⓑ いわゆる van der Corput の lemma.

一般のものと、$|f'|\le\frac{1}{2}$ のものと、

Ⓒ 差分を利用する平均化

Ⓓ exponent pairs

を説明する。Ⓐ～Ⓓ (除、Ⓒ?) のいずれも van der Corput の lemma(s) と呼ばれるものを得るが特にⒷのが有名であ

3。(Ⓐ, Ⓑ は [v.d.C-1], Ⓓ は [v.d.C-2] 以降)

5° まず Ⓐ について. 以下 $f(x)$ は、所定の条件を満す実数値函数とする。

[Lemma (イ)] $f(x)$ 実数値, 微分可能 s.t. $f'(x)$ 単調かつ >0 ならば 注)

$$\left|\int_X^{X'} e^{if(x)}\,dx\right| \ll_{\text{abso.}} \mathfrak{M}\left(\frac{1}{|f'|}\right)$$

を得る.

[Lemma (ロ)]. $f(x)$ 実数値, 2階微分可能, $f''(x)>0$. ならば

$$\left|\int_X^{X'} e^{if(x)}\,dx\right| \ll_{\text{abso.}} \sqrt{\mathfrak{M}\left(\frac{1}{|f''|}\right)}$$

を得る.

(∵ いずれも [T] 第4章のはじめ)

同じ発想で $f^{(k+1)}$ の事で、評価を得るが. 利点は少かろう.

[Lemma (ハ)] $f(x)$ 実数値, C^3-級.

$$\lambda_2 \gg f'' \geq \lambda_2 \quad (>0) \quad \text{on } [X, X']$$

$$|f'''| \leq \lambda_3 \quad \text{on } 〃$$

$$c \text{ s.t. } f'(c)=0 \ (\text{if } \exists).\ (c \in [X, X'] \text{ は高々1個})$$

とするとき.

$$\chi(c) = \begin{cases} 1 & \text{if } c \in [X, X'] \\ 0 & \text{if } c \notin [X, X'] \end{cases}$$

注) $\mathfrak{M}(|(\cdots)|) = \max_{\text{所定の範囲}} |(\cdots)|$ の意

とおけば
$$\int_X^{X'} e^{if(x)}dx = \chi(c)\cdot\sqrt{2\pi}\, e^{2\pi i\frac{1}{8}}\cdot\frac{e^{if(c)}}{\sqrt{|f''(c)|}}$$
$$+ O\Big(\sum_{\xi=X,X'} \min\Big(\frac{1}{|f'(\xi)|}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\Big)\Big)$$
$$+ O\big(\lambda_2^{-\frac{4}{5}}\cdot\lambda_3^{\frac{1}{5}}\big)$$
を得る。 $O(\cdots)$ の定数は絶対定数。

(∵ [T] の Lemma 4.6)

この誤差項の第2のものは、望しくない形であるが永い間改良されずにいたが、解析性を仮定するなら

[Lemma (1)$'$] (Колесник. [Ko-1]) ($z = x+\sqrt{-1}\,y$ とおく)

$$f(z) : \text{analytic for} \begin{cases} |z-x| \leq \sqrt{M\cdot\log x_0} \\ A \leq x \leq B \end{cases} \quad (B = A+U,\ U\geq 1)$$

$f(x)$ は実数値 ($x\in[A,B]$) で
$$\begin{cases} M^{-1} \leq f''(x) \leq C_0 M^{-1} \\ |f^{(k+2)}(x)| < C_0\, k!\, M\, U^{-k} \ (\forall k=1,2,3,\cdots) \end{cases}$$
を仮定し、 (1) と同様に
$$c \in \mathbb{R} \ \text{s.t.}\ f'(c)=0 \quad (\text{if } \exists c)$$
$$\chi(c) = \begin{cases} 1 & \text{if } c\in[A,B] \\ 0 & \text{if } c\notin[A,B] \end{cases}$$
とおき、 Θ を
$$\Theta = \min\big(|f'(A)|, |f'(B)|\big)$$
として、更に大きさの諸仮定として
$$U \underset{\text{def.}}{=} B-A \ \text{は}\ \geq 1,$$

$$\log U < C_2 \cdot \log x_0 ,$$

$$U^2 > 6 C_2 C_0 \cdot M^{\frac{3}{2}} \cdot (\log x_0)^3 ,$$

$$M > M_0 \quad (\text{ある程度大きいの意}) ,$$

$$Ⓗ < c \cdot \frac{H}{M} \sqrt{\log x_0} ,$$

ならば

$$\int_A^B e^{if(x)} dx = \chi(c) \cdot \sqrt{2\pi} \cdot e^{2\pi i \frac{1}{8}} \cdot \frac{e^{if(c)}}{\sqrt{|f''(c)|}}$$

$$+ O\left(\min \left(\frac{(\log x_0)^2}{Ⓗ} , \sqrt{M} \right) \right)$$

となる。(ここに c, c_0, C_2, M_0 は定数とする).

(◎ [K₀-1]; [T] p72 であるような、有名な 45° の contour 上の積分を使用)

6°. Ⓑについて.

[Lemma (=)] $f(x)$ 実数値, 微分可能, $f'(x)$ 単調減少 in $[X, X']$, として、今 $[Y, Y'] = f'([X, X'])$ (区間) とおき, 更に η を $\frac{1}{2} > \eta > 0$ とすると,

$$\sum_{X < x \leq X'} e^{2\pi i f(x)} = \sum_{Y-\eta < y \leq Y'+\eta} \int_X^{X'} e^{2\pi i (f(x) - yx)} \cdot dx$$

$$+ O\left(\log (Y' - Y + 2) \right) + O\left(\frac{1}{\eta} \right)$$

を得る。

[Lemma (ホ)] 特に，$f(x)$ 実数値，微分可能．$f'(x)$ 単調減少で

$$0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2} \quad \text{on } [X, X']$$

ならば

$$\left| \sum_{X \leq n \leq X'} e^{2\pi i f(n)} - \int_X^{X'} e^{2\pi i f(x)} dx \right| \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2}} \right)$$

を得る．

((注) (ニ) は [T] の Lemma 4.7。(ホ) は [T] の Lemma 4.8 に弱い形がある。正確な形は [J.-L.] にある)

(ホ)はいわば和を対応する積分で近似したものになる．

[系 (ハ)] $f(x)$：実数値，C^3-級 on $[X, X']$ が

$$f'(x) \text{ 単調減少}, \quad \lambda_2 \ll (-f'') \ll \lambda_2,$$

$$|f^{(3)}| \ll \lambda_3,$$

とするとき，

$$[Y, Y'] = f'([X, X']) \quad (\text{区間})$$

とおいて　$y \in [Y, Y']$　に対し

$$x_y \text{ by } f'(x_y) = y,$$

$$g(y) \underset{\text{def.}}{=} f(x_y) - y \cdot x_y$$

とおくと，

$$\sum_{X < x \leq X'} e^{2\pi i f(x)} = e^{-2\pi i \frac{1}{8}} \sum_{Y < y \leq Y'} |f''(x_y)|^{-\frac{1}{2}} e^{2\pi i g(y)}$$

$$+ O(\lambda_2^{-\frac{1}{2}}) + O\left(\log (2 + (X'-X)\lambda_2) \right) + O\left((X'-X)(\lambda_2 \lambda_3)^{\frac{1}{3}} \right)$$

を得る。

(☺ [T] Theorem 4.9).

$f(x)$ が 2次式 ならば [W] (1927年) は理想的になっている。この系も Колесник ([同前]) により.

[系 (ハ)′]. $f(x)$ が いろいろの仮定を満す解析函数ならば上記 (ハ) での誤差項は

$$+\,O\left(\log x_0 \times (D^2 M^{-1})^{\frac{1}{4}}\right) \quad +\,O\left(M^{\frac{1}{2}}\right)$$

の形でよい.

以上のいずれも (除 (ハ)′) (通常の) van der Corput の Lemma と呼ばれていて. 特に (ホ) の右辺が $O(1)$ の形のものが有名である。

7° ©について.

[Lemma (ト)] $f(x)$ 実数値函数. $q \in \mathbb{N}$ s.t. $q \leq X'-X$.

のとき

$$\left| \sum_{X < x \leq X'} e^{2\pi i f(x)} \right| \ll \frac{X'-X}{\sqrt{q}} + \sqrt{\frac{X'-X}{q}} \cdot \sqrt{\sum_{r=1}^{q-1} \left| \sum_{X < x \leq X'-r} e^{2\pi i f_r(x)} \right|}$$

ただし $\quad f_r(x) \underset{df.}{=} f(x+r) - f(x)$

となる.

(☺ [T] Lemma 5.10. 初出は van der Corput (1929) ([T] 文献中の v.d. Corput の (6). = M.Z. 29. (1929), p398〜) のようである。)

8° Ⓓ について.

[定義(b)] 実数の組 (k_p, l_p) $p=1,2,\cdots,m$.

$$0 \le k_p \le \tfrac{1}{2}, \quad 0 \le l_p \le 1$$

が、 $\forall s$ 実数 >0, $\exists r \in \mathbb{N}\ (\ge 3)$, $\exists c\ (0<c \le \tfrac{1}{2})$

such that 『 $t>1$, $1 \le a < b < at$, $y > a^{s}$,

$f(x)$ $[a,b]$ 上の実数値函数で $f^{(r)}$ まで存在

かつ $$f^{(p+1)}(x) = (-1)^p \cdot y \cdot \frac{s(s+1)\cdots(s+p-1)}{x^{s+p}} \times (1+\theta)$$

但し $\begin{cases} \theta \text{ は } |\theta| < c \text{ (誤差用)} \\ x \in [a,b], \quad p=0,1,\cdots,r-1, \end{cases}$

ならば

$$\Bigl| \sum_{x \text{ s.t. } a \le x \le b} e^{2\pi i f(x)} \Bigr| \ll_{(s,t)} \sum_{p=1}^{m} z^{k_p} a^{l_p}$$

(他に k_p, l_p, m も関係し得る)

』の形の評価を得る ; 但し $z \underset{\mathrm{def}}{=} y \cdot a^{-s}$ (>1)

となるとき、この (k_p, l_p) $(p=1,\cdots,m)$ を exponent pairs の一組と言う.

つまり、[v.d.C-2] p57 に示される如く、$f(x)$ を少くとも C^3 級として、
$$f(x) \doteqdot \begin{cases} \dfrac{y \cdot x^{1-s}}{1-s} & (s \ne 1,\ s>0) \\ \text{又は} & \\ y \log x & s=1 \end{cases}$$

と同じ挙動をするものと見たいわけである。ここで自明な exponent pair としては

$$m=1, \quad (k_1, l_1) = (0, 1)$$

を得るので、定義は non-void である。

いま [(1)] に示される $f(x)$ と $g(y)$ の対について (+) の定義にでてくる諸記号を

$$s,\ r,\ c,\ t,\ y \quad \text{for } f(x) \text{ on } [a,b]$$

$$\sigma,\ r,\ \gamma,\ \tau,\ \eta \quad \text{for } g(y) \text{ on } f'([a,b])$$

$$\sigma = s^{-1}, \quad \tau \fallingdotseq t^{s}, \quad \eta = y^{\sigma} .$$

と対応させて読むことにすれば

[Lemma (+)] $\forall r, \gamma, s$ (in (+)), $\exists C$ (in (+)) such that「上記の関係」。

(◎ [v.d.C-2], Hilfssatz 7)

を得る。すると、[(1)] とあわせれば

[系(11)] (κ_p, λ_p) $p = 1, \cdots, \mu$, 但 $\lambda_p \geqq \frac{1}{2}$

なる exponent pairs から

$$(k_p, l_p) \quad \begin{cases} k_p = \lambda_p - \frac{1}{2}, & l_p = \kappa_p + \frac{1}{2} \qquad p = 1, \cdots, \mu \\ k_{\mu+1} = \frac{2}{5}, & l_{\mu+1} = \frac{1}{2} \qquad (m = \mu+1) \end{cases}$$

なる exponent pairs を得る。

多変数型の対応物は [Ko-3] にある。

しかし、[(1)], [(11)] において、直接くり返し適用すると、元に戻るだけであるから、ⓒの段階をかませたりして、函数をとりかえて、反転公式を適用してゆくわけである。筆者の感想では、しかし、一頁目の下に述べた如く「高次のテータ級数」を見つける方が先決問題と見たいが、いかがであろう。

(以上)

文献

単行本として

[Sa] Ra. Salem : Essais sur les séries trigonométriques , Hermann ,1940 .

[T] E.C.Titchmarsh : The theory of the RIEMANN zeta-function , Oxford,1951.

[Vau] R.C.Vaughan The HARDY-LITTLEWOOD method Cambridge Tracts in Math. Vol.80 ,1981.

[I.M.V] И.М.Виноградов : Метод тригонометрических сумм в теорий чисел , Наука,1971. (英訳あり I.M.Vinogradov : Trigonometrical sums in number theory , Indian Statistical Institute , Statistical Publishing Sosiety , 1975.)

京都大学数理解析研究所講究録より

[鹿] 鹿野健 :「van der Corput の Lemma の応用について」, No157, 解析的整数論の諸題, 1972年8月.

[中-1] 中井喜信 :「θ-Weyl和」, No222, 数論と調和解析, 1974年9月.

[中-2] 〃 :「テータ・ワイル和」, No274, 数論的関数の特性, 1976年7月.

論文として

[B] B.J.Birch : Forms in many variables,Proc.Roy.Soc.London, A265,1962.

[v.d.C-1] [T] 中の文献の van der Corput の (1) (Math. Ann. 84, 1921).

[v.d.C-2] 〃 〃 の (2) (Math. Ann. 87, 1922).

[D] H. Davenport ; Cubic forms in 16 variables, Proc. Roy. Soc. London, A.272,1963.

[F.-J.-K] H.Fiedler, W.Jurcat and O.Körner : Asymptotic expansions of finite theta series, Acta Arith., 32,1977,129-146.

[J-L] [T]中の文献の V.Jarník-E.Landau (Math. Z.,39,1935,745-767.)

[久] T.Kubota : 高次中剰余記号に関する"テータ級数"についての一連の仕事

[Ko-1] Г.A.Колесник (G.Kolesnik): О распределений простых чисел в последовательностях вида $[n^c]$, Матем. заметки, 2, 1967, 117-128.
[Ko-2] " : Об оценке некоторых тригонометрических сумм, Acta Arith., 25, 1973, 7-30.
[Ko-3] G.Kolesnik : On the estimation of multiple exponential sums, Recent progress in analitic number theory, Vol.1, ed. by H.Halberstam and C.Hooley, Acad. Press, 1981.

[N] Y.-N. Nakai : On a θ-Weyl sum, Nagoya Math. J., 52, 1973, 163-172.

[Pa] S.J.Patterson : A cubic analogue of the theta series, I-II, J.reine angew. Math. 296, 1977, 125-161, 217-220.

[Ra] R.A.Rankin : Van der Corput's method and the theory of exponent pairs, Q.J. of Math., 26, 1955, 147-153.

[T] 本 [T]中の Titchmarsh の諸論文. (8)-(12), 多変数型は (24), (15) など.

[Vo] G.Voronoï : Sur une fonction transcendente et ses applications a la sommation de quelques séries, Ann, de l'Ecole Norm. Sup., (3) 21, 1904, 207-267 et 459-533.

[Wi] J.R.Wilton: J.London M.Soc., 2, 1927, 177-180, および 9, 1934, 194-201, 247-254.

[M] W.Maier : Transformation der kubischen Thetafunction, Math.Ann.111, 1935.